ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 28, № 141 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-26-38

УДК 517.929

Свойства средней временной выгоды для вероятностных моделей эксплуатируемых популяций

Мебрахтом Себхату ВОЛДЕАБ

ФГБОУ ВО «Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

600000, Российская Федерация, г. Владимир, ул. Горького, 87

Аннотация. Рассматривается модель однородной популяции, заданная при отсутствии эксплуатации дифференциальным уравнением $\dot{x} = g(x)$. В каждый момент времени $\tau_k = kd$, где $d > 0$, $k = 1, 2, \ldots,$ из этой популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega_k \in [0, 1]$. Предполагаем, что можно остановить заготовку в случае, если ее доля окажется больше некоторого значения $u \in [0, 1)$; тогда доля добываемого ресурса будет равна $\ell_k = \ell(\omega_k, u) = \min(\omega_k, u)$, $k = 1, 2, \ldots.$ Исследуется средняя временная выгода от добычи ресурса, которая равна нижнему пределу при $n \to \infty$ среднего арифметического количества ресурса, полученного за n извлечений. Показано, что свойства данной характеристики связаны с наличием положительной неподвижной точки разностного уравнения $X_{k+1} = \varphi\big(d, (1-u)X_k\big)$, $k = 1, 2, \ldots,$ где $\varphi(t, x)$ — решение уравнения $\dot{x} = g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Получены условия существования предела и оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица. Результаты работы проиллюстрированы на примерах эксплуатируемых однородных популяций, зависящих от случайных параметров.

Ключевые слова: вероятностная модель подверженной промыслу популяции, средняя временная выгода, оптимальная эксплуатация

Для цитирования: *Волдеаб М.С.* Свойства средней временной выгоды для вероятностных моделей эксплуатируемых популяций // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. С. 26–38. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-26-38.

SCIENTIFIC ARTICLES

DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-26-38

Properties of the average time benefit for probabilistic models of exploited populations

Mebrahtom S. WOLDEAB
Vladimir State University
87 Gorkogo St., Vladimir 600000, Russian Federation

Abstract. A model of a homogeneous population given in the absence of exploitation by a differential equation $\dot{x} = g(x)$ is considered. At each moment of time $\tau_k = kd,$ where $d > 0,$ $k = 1, 2, \ldots,$ some random share of the resource $\omega_k \in [0, 1]$ is extracted from this population. We assume that it is possible to stop the harvesting if its share turns out to be greater than a certain value $u \in [0, 1):$ then the share of the extracted resource will be $\ell_k = \ell(\omega_k, u) = \min(\omega_k, u),$ $k = 1, 2, \ldots.$ The average time benefit from resource extraction is investigated, it is equal to the lower limit of the arithmetic amount of the resource obtained in n extractions as $n \to \infty$. It is shown that the properties of this characteristic are associated with the presence of a positive fixed point of the difference equation $X_{k+1} = \varphi\big(d, (1-u)X_k\big),$ $k = 1, 2, \ldots,$ where $\varphi(t, x)$ is a solution of the equation $\dot{x} = g(x)$ satisfying the initial condition $\varphi(0, x) = x.$ The conditions for the existence of the limit and the estimates of the average time benefit performed with probability one are obtained. The results of the work are illustrated by examples of exploited homogeneous populations depending on random parameters.

Keywords: probabilistic model of a population subject to harvesting, average time benefit, optimal exploitation

Mathematics Subject Classification: 37N35, 39A50, 49N25, 93C15.

For citation: Woldeab M.S. Properties of the average time benefit for probabilistic models of exploited populations. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, 2023, vol. 28, no. 141, pp. 26–38. DOI 10.20310/2686-9667-2023-28-141-26-38. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Задачи оптимального сбора ресурса в вероятностных моделях рассматриваются, начиная с семидесятых годов прошлого века [1, 2] и актуальны до настоящего времени [3–7]. Интерес к данной тематике обусловлен проблемами природосбережения при эксплуатации популяций, подверженных случайным воздействиям окружающей среды [8, 9]. Объектом исследования в этих работах являются популяции, заданные дифференциальными или разностными уравнениями, из которых в определенные моменты времени производится добыча части ресурса.

Наиболее близкими по содержанию к данной публикации являются работы [6, 7]; в них введено понятие средней временной выгоды для однородной популяции и описан способ добычи ресурса на бесконечном промежутке времени, при котором с вероятностью единица существует предел данной характеристики. В [10, 11] рассматривается структурированная популяция, состоящая из нескольких видов или возрастных классов, заданная системой дифференциальных уравнений. Показано, что для получения оценки средней временной выгоды нужны дополнительные условия, которым должны удовлетворять решения данной системы. Вопросам эксплуатации популяции, заданной разностными уравнениями со случайными параметрами, посвящены статьи [12, 13]. В последних работах показано, что оценки средней временной выгоды существенно зависят от свойств функции, определяющей разностное уравнение при отсутствии эксплуатации. Подробный обзор работ по данной тематике приведен в [13–15].

Данная статья является продолжением исследований [6, 7]. Отметим, что в [7] построено управление, ограничивающее количество извлекаемого ресурса таким образом, чтобы оставшийся размер популяции в каждый момент извлечения τ_k, $k = 1, 2, \dots,$ был не меньше заданного значения $x > 0.$ В настоящей работе предложен другой способ эксплуатации популяции, при котором ограничивается доля ресурса, добываемого в момент τ_k. Кроме того, здесь получены новые утверждения об оценке средней временной выгоды, которые, по сравнению с работой [7], представляются более удобными при решении практических задач.

1. Основные определения и обозначения

Рассматривается модель популяции, которая при отсутствии эксплуатации задана дифференциальным уравнением $\dot{x} = g(x)$, а в каждый из моментов времени $\tau_k = kd$, где $d > 0$, из этой популяции извлекается некоторая случайная доля ресурса $\omega_k \in \Omega \subseteq [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots.$ Пусть имеется возможность влиять на процесс сбора ресурса таким образом, чтобы остановить заготовку в том случае, когда ее доля окажется достаточно большой (больше некоторого значения $u \in [0, 1)$ в момент τ_k), чтобы сохранить возможно больший остаток ресурса для увеличения размера следующего сбора. В этом случае доля добываемого ресурса будет равна

$$\ell_k = \ell(\omega_k, u) = \min\{\omega_k, u\}, \quad k = 1, 2, \dots.$$

Таким образом, мы рассматриваем эксплуатируемую популяцию, динамика которой задана дифференциальным уравнением с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} &\dot{x} = g(x), \quad t \neq \tau_k, \\ &x(\tau_k) = (1 - \ell_k)x(\tau_k - 0), \quad k = 1, 2, \dots. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Предполагаем, что решения уравнения (1.1) непрерывны справа, функция $g(x)$ определена и непрерывно дифференцируема для всех $x \in [0, +\infty)$.

Пусть также имеет место следующее условие.

У с л о в и е 1.1. Предположим, что $g(0) \geqslant 0$ и существует $K > 0$ такое, что $\varphi(t) \equiv K$ является решением уравнения $\dot{x} = g(x)$.

З а м е ч а н и е 1.1. Отметим, что условие 1.1 выполнено выполнено для следующих уравнений:

1. Линейное уравнение $\dot{x} = a(K - x)$, где $K > 0$, $a > 0$.

2. Логистическое уравнение $\dot{x} = (a - bx)x$, где коэффициенты $a > 0$ и $b > 0$ являются показателями роста популяции и внутривидовой конкуренции соответственно.

3. Уравнение, учитывающее нижнюю критическую границу численности популяции и самоограничение при больших плотностях $\dot{x} = a\dfrac{\beta x^2}{\beta + \gamma x} - dx - \delta x^2$; здесь все постоянные $a, \beta, \gamma, d, \delta$ положительные (модель динамики популяции А.Д. Базыкина, см. [16, с. 44]).

4. Уравнение $\dot{x} = ax(x - L)(K - x)$, где $a > 0$, $K > L > 0$, L — нижняя критическая плотность популяции, K — стационарная плотность.

5. Уравнение Гомпертца $\dot{x} = -\dfrac{\varepsilon x}{\ln K} \ln \dfrac{x}{K}$, где $\varepsilon > 0$, $K > 1$.

Пусть $\overline{\ell} = (\ell_1, \ldots, \ell_k, \ldots)$, $x_0 \geqslant 0$ — начальный размер популяции, X_k — количество ресурса до сбора в момент kd, $k = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим функцию

$$H_*\big(\overline{\ell}, x_0\big) \doteq \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k \ell_k, \tag{1.2}$$

введенную в работе [6], которая называется *средней временной выгодой* от извлечения ресурса. Если предел в правой части (1.2) существует, то среднюю временную выгоду будем обозначать $H\big(\overline{\ell}, x_0\big) \doteq \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} X_k \ell_k$.

Приведем описание вероятностной модели $(\Sigma, \mathfrak{A}, \mu)$, определяющей поведение случайных последовательностей $\sigma = (\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots)$. Предполагаем, что задано вероятностное пространство $(\Omega, \widetilde{\mathfrak{A}}, \widetilde{\mu})$, где $\Omega \subseteq [0, 1]$, $\widetilde{\mathfrak{A}}$ — сигма-алгебра подмножеств Ω; $\widetilde{\mu}$ — вероятностная мера, определенная с помощью функции распределения F.

Пусть $\Sigma \doteq \{\sigma : \sigma = (\omega_1, \ldots, \omega_k, \ldots)\}$, где $\omega_k \in \Omega$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ наименьшую сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами

$$D_k \doteq \{\sigma \in \Sigma : \omega_1 \in A_1, \ldots, \omega_k \in A_k\}, \quad \text{где} \quad A_i \in \widetilde{\mathfrak{A}}, \ i = 1, 2, \ldots, k,$$

и зададим меру $\widetilde{\mu}(D_k) = \widetilde{\mu}(A_1) \cdot \ldots \cdot \widetilde{\mu}(A_k)$. Тогда в силу теоремы А. Н. Колмогорова (см., например, [17, с. 176]) на измеримом пространстве $(\Sigma, \mathfrak{A})$ существует единственная вероятностная мера μ, которая является продолжением меры $\widetilde{\mu}$ на сигма-алгебру $\mathfrak{A}$.

2. Утверждения о существовании положительной неподвижной точки и средней временной выгоды

Определим $\varphi(t, x)$ как решение уравнения $\dot{x} = g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$, где $x \geqslant 0$. Обозначим через x_k количество ресурса после сбора в момент τ_k, тогда $X_{k+1} = \varphi(d, x_k)$ и $x_k = (1 - \ell_k)X_k$. Если $\ell_k = u$ для всех $k = 1, 2, \dots$ (такое возможно при $\omega_1 \geqslant u, \omega_2 \geqslant u, \dots$), то X_k удовлетворяет разностному уравнению

$$X_{k+1} = \varphi\big(d, (1 - u)X_k\big), \quad k = 1, 2, \dots. \tag{2.1}$$

Пусть $X(u)$ — неподвижная точка уравнения (2.1), тогда $X(u) = \varphi(d, (1 - u)X(u))$.

Утверждение 2.1. *Если выполнено условие 1.1, то уравнение (2.1) имеет неподвижную точку $X(u)$ такую, что $X(u) \leqslant K$.*

Доказательство. Пусть $d > 0$ фиксировано. Покажем, что функция $\varphi(d, x)$ возрастающая. Действительно, если существуют такие $x_1 < x_2$, что $\varphi(d, x_1) \geqslant \varphi(d, x_2)$, то найдется точка $t_* \in (0, d]$ такая, что $\varphi(t_*, x_1) = \varphi(t_*, x_2)$; получили противоречие с условием единственности решений дифференциального уравнения.

Отметим, что условие $g(0) \geqslant 0$ является *условием квазиположительности* для дифференциального уравнения $\dot{x} = g(x)$. Данное условие означает, что решения уравнения $\dot{x} = g(x)$ являются неотрицательными при любых неотрицательных начальных условиях (см. [18, с. 34]). Таким образом, из $g(0) \geqslant 0$ следует, что $\varphi(d, x) \geqslant 0$ для любого $x \geqslant 0$; в частности, $\varphi(d, 0) \geqslant 0$.

Если $\varphi(d, 0) = 0$, то уравнение (2.1) имеет неподвижную точку $X(u) = 0$. Предположим, что $\varphi(d, 0) > 0$. Рассмотрим функцию $h(x) \doteq \varphi(d, (1-u)x)$, которая также является возрастающей. Тогда $h(0) = \varphi(d, 0) > 0$ и

$$h(K) = \varphi(d, (1 - u)K) \leqslant \varphi(d, K) = K; \tag{2.2}$$

поэтому существует точка пересечения графиков функций $y = h(x)$ и $y = x$, т. е. неподвижная точка $X(u)$ уравнения (2.1), такая, что $0 < X(u) \leqslant K$. □

В следующем утверждении приведены условия существования положительной неподвижной точки уравнения (2.1).

Утверждение 2.2. *Предположим, что существует $K > 0$ такое, что $\varphi(t) \equiv K$ является решением уравнения $\dot{x} = g(x)$. Если, кроме того, выполнено одно из условий:*

1) $\varphi(d, 0) > 0$;

2) $\varphi(d, 0) = 0$ *и* $(1 - u)\varphi'_x(d, 0) > 1$,

то уравнение (2.1) имеет неподвижную точку $X(u)$, такую, что $0 < X(u) \leqslant K$.

Доказательство. При $\varphi(d, 0) > 0$ доказательство существования положительной неподвижной точки приведено в утверждении 2.1.

Пусть выполнено второе условие утверждения. Отметим, что при $u = 1$ неравенство $(1 - u)\varphi'_x(d, 0) > 1$ не верно; поэтому дальше рассматриваем $u \in [0, 1)$. Найдем

$$h(0) = \varphi(d, 0) = 0, \quad h'(0) = (1 - u)\varphi'_x(d, 0) > 1,$$

тогда касательная к графику функции $y = h(x)$ в точке $x = 0$ находится выше биссектрисы первого координатного угла, следовательно, найдется $x_* > 0$ такое, что $h(x_*) > x_*$. Поэтому, учитывая (2.2), из непрерывности функции $h(x)$ получаем, что существует $X(u)$ — точка пересечения биссектрисы с графиком $y = h(x)$, причем $0 < X(u) \leqslant K$. □

Утверждение 2.3. *Предположим, что* $\varphi(d,0)=0$ *и выполнено одно из условий:*
1) $(1-u)\varphi'_x(d,0)\leqslant 1$ *и функция* $\varphi(d,x)$ *строго выпукла вверх;*
2) $(1-u)\varphi'_x(d,0)\geqslant 1$ *и функция* $\varphi(d,x)$ *строго выпукла вниз.*
Тогда уравнение (2.1) *имеет единственную неподвижную точку* $X(u)=0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $u=1$, то из условия $\varphi(d,0)=0$ следует, что уравнение (2.1) имеет вид $X_{k+1}=0$, $k=0,1,2,\ldots,$ поэтому утверждение верно.

Далее считаем, что $u\neq 1$ и исследуем функцию $h(x)\doteq\varphi(d,(1-u)x)$. Пусть выполнено первое условие утверждения. Заметим, что $h(0)=0$, $h'(0)\leqslant 1$. Кроме того, функция $h(x)$, как и $\varphi(d,x)$, строго выпукла вверх. Поэтому график $h(x)$ лежит ниже любой касательной к данной функции, в том числе, касательной $y=h'(0)x$, которая, в свою очередь, расположена не выше биссектрисы $y=x$; следовательно, $h(0)=0$ и $h(x)<x$ при $x>0$. Таким образом, единственной неподвижной точкой уравнения (2.1) является тривиальная точка $X(u)=0$. При выполнении второго условия утверждения доказательство аналогично. □

З а м е ч а н и е 2.1. Если $\varphi(d,0)=0$ и выполнено $(1-u)\varphi'_x(d,0)<1$, то в утверждении 2.3 условие строгой выпуклости вверх функции $\varphi(d,x)$ можно заменить на условие выпуклости вверх. Утверждение также верно, если $(1-u)\varphi'_x(d,0)>1$ и функция $\varphi(d,x)$ выпукла вниз. Отметим также, что при выполнении первого условия утверждения неподвижная точка $X(u)=0$ является устойчивой, при выполнении второго условия она неустойчивая.

Для любого $u\in[0,1]$ введем случайную величину $\ell(\omega,u)=\min\{\omega,u\}$ и обозначим через $M\ell(u)$ ее математическое ожидание. Пусть $x(u)\doteq(1-u)X(u)$, тогда $X(u)=\varphi(d,x(u))$.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие 1.1. Тогда для любого* $x_0\in[x(u),K]$ *и для почти всех* $\sigma\in\Sigma$ *выполнены неравенства*

$$X(u)M\ell(u)\leqslant H_*\big(\bar{\ell},x_0\big)\leqslant KM\ell(u). \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполнено условие 1.1, то уравнение (2.1) имеет неподвижную точку $X(u)$ и $x(u)\leqslant X(u)\leqslant K$. Рассмотрим $x_0\in[x(u),K]$. Как доказано в утверждении 2.1, функция $\varphi(d,x)$ возрастающая, тогда

$$X_1=\varphi(d,x_0)\geqslant\varphi(d,x(u))=X(u),$$

поэтому, так как $\ell(\omega_1,u)\leqslant u$, получаем

$$x_1=(1-\ell(\omega_1,u))X_1\geqslant(1-\ell(\omega_1,u))X(u)\geqslant(1-u)X(u)=x(u).$$

Далее, $X_2=\varphi(d,x_1)\geqslant\varphi(d,x(u))=X(u)$. Аналогично получаем, что $X_k\geqslant X(u)$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Кроме того, если $x_0\leqslant K$, то $X_k\leqslant K$ для всех $k\in\mathbb{N}$. Таким образом,

$$X(u)\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell(\omega_k,u)\leqslant H_*\big(\bar{\ell},x_0\big)\leqslant K\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ell(\omega_k,u). \tag{2.4}$$

Отметим, что случайные величины $\ell(\omega_k,u)$ независимы, одинаково распределены и, так как $0\leqslant\ell(\omega_k,u)\leqslant u$ для всех $k\in\mathbb{N}$, то $M|\ell(\omega_k,u)|=M\ell(u)\leqslant u<\infty$. Тогда из усиленного закона больших чисел Колмогорова следует, что для почти всех $\sigma \in \Sigma$ имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ell(\omega_k, u) = M\ell(u),$$

поэтому из (2.4) следует неравенство (2.3). $\square$

3. Существование предела и оценки средней временной выгоды, выполненные с вероятностью единица

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим $\sigma_k \doteq (\omega_1, \dots, \omega_k) \in \Omega^k$ и зададим рекуррентным образом случайные величины $A_k = A_k(\sigma_{k-1}, x)$, $B_k = B_k(\sigma_{k-1}, x)$:

$$\begin{aligned} &A_1 = X(u), \ A_{k+1} = \varphi\big(d, (1-\ell_k)A_k\big); \\ &B_1 = K, \qquad B_{k+1} = \varphi\big(d, (1-\ell_k)B_k\big), \quad k = 1, 2, \dots . \end{aligned}$$

Далее через MA_k и MB_k обозначены математические ожидания случайных величин A_k и B_k соответственно.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие 1.1. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in [x(u), K]$ и для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства*

$$\frac{M\ell(u)}{m} \sum_{k=1}^{m} MA_k \leqslant H_*\big(\bar{\ell}, x_0\big) \leqslant \frac{M\ell(u)}{m} \sum_{k=1}^{m} MB_k. \tag{3.1}$$

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 1 работы [7].

Лемма 3.1. *Пусть выполнено условие 1.1. Тогда последовательность $\{MA_k\}_{k=1}^{\infty}$ является неубывающей, а $\{MB_k\}_{k=1}^{\infty}$ — невозрастающей, существуют конечные пределы данных последовательностей и $\lim\limits_{k\to\infty} MA_k \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} MB_k \leqslant K$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала докажем, что

$$A_1 = X(u) \leqslant A_2(\omega, u) = \varphi\big(d, (1-\ell_1)X(u)\big) \text{ для любого } \omega \in \Omega. \tag{3.2}$$

Поскольку $\ell_k = \min(\omega_k, u) \leqslant u$, $X(u) > 0$, то $(1-u)X(u) \leqslant (1-\ell_k)X(u)$ и, так как функция $x \mapsto \varphi(d, x)$ возрастающая, то

$$X(u) = \varphi\big(d, (1-u)X(u)\big) \leqslant \varphi\big(d, (1-\ell_1)X(u)\big) = A_2(\omega_1, u).$$

Последнее неравенство выполнено для любого $\omega_1 \in \Omega$, поэтому $MA_1 \leqslant MA_2$.

Далее, из определений A_2 и A_3 следует

$$MA_2 = \int\limits_{\Omega} \varphi\big(d, (1-\ell_1)X(u)\big) d\omega_1 = \int\limits_{\Omega} \varphi\big(d, (1-\ell_2)X(u)\big) d\omega_2 = \int\limits_{\Omega\times\Omega} \varphi\big(d, (1-\ell_2)X(u)\big) d\omega_1 d\omega_2,$$

$$MA_3 = \int\limits_{\Omega\times\Omega} \varphi\big(d, (1-\ell_2)\varphi(d, (1-\ell_1)X(u))\big) d\omega_1 d\omega_2.$$

Из последних равенств и (3.2) получаем $MA_2 \leqslant MA_3$. Аналогично, $MA_k \leqslant MA_{k+1}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Таким же образом доказывается, что последовательность $\{MB_k\}_{k=1}^{\infty}$ невозрастающая.

Отметим, что $0 < A_1 = X(u) \leqslant K = B_1$, поэтому

$$A_2 = \varphi\big(d, (1-\ell_1)X(u)\big) \leqslant \varphi\big(d, (1-\ell_1)K\big) = B_2$$

и также $A_k \leqslant B_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Таким образом,

$$0 < X(u) \leqslant MA_k \leqslant MB_k \leqslant MB_1 = K.$$

Отсюда следует существование конечных пределов рассматриваемых последовательностей $\{MA_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{MB_k\}_{k=1}^{\infty}$ и неравенство $\lim\limits_{k\to\infty} MA_k \leqslant \lim\limits_{k\to\infty} MB_k \leqslant K.$ □

Теорема 3.2. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *интервал* $(x(u), K)$ *содержится в области притяжения решения* $\varphi(t) \equiv K$ *уравнения* $\dot{x} = g(x)$;

2) $g'(x) < 0$ *при* $x \in (x(u), K)$.

Тогда для почти всех $\sigma \in \Sigma$ *существует предел*

$$H\big(\overline{\ell}, x_0\big) = M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MA_k = M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MB_k, \tag{3.3}$$

не зависящий от начального значения $x_0 \in [x(u), K]$.

Доказательство. Напомним, что через $\varphi(t, x)$ мы обозначаем решение уравнения $\dot{x} = g(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x) = x$. Заметим, что функция $\varphi'_x(t, x)$ удовлетворяет уравнению $\dot{y} = g'_x\big(\varphi(t, x)\big)y$ и $\varphi'_x(0, x) = 1$. Далее, если $x \in (x(u), K)$, то $\varphi(t, x) \in (x(u), K)$, поскольку $(x(u), K)$ входит в область притяжения решения $\varphi(t) \equiv K$. Следовательно, $g'_x\big(\varphi(t, x)\big) < 0$ для всех $t \geqslant 0$, $x \in (x(u), K)$, поэтому существует $q < 1$ такое, что для фиксированного $d > 0$

$$\varphi'_x(d, x) = \exp \int_0^d g'_x\big(\varphi(s, x)\big) ds \leqslant q < 1.$$

В силу теоремы Лагранжа при $x_1 < x_2$ имеем $\varphi(d, x_2) - \varphi(d, x_1) = \varphi'_x(d, \widehat{x})(x_2 - x_1)$, где $\widehat{x} \in (x_1, x_2)$, поэтому $\varphi(d, x_2) - \varphi(d, x_1) \leqslant q(x_2 - x_1)$ для всех $x_1 \in (x(u), K)$, $x_2 \in (x(u), K)$. Из последнего неравенства получаем

$$B_2 - A_2 = \varphi\big(d, (1-\ell_1)B_1\big) - \varphi\big(d, (1-\ell_1)A_1\big) \leqslant q(1-\ell_1)(B_1 - A_1).$$

Аналогично, неравенство $B_{k+1} - A_{k+1} \leqslant q(1-\ell_k)(B_k - A_k)$ выполнено для всех $k = 1, 2, \ldots$, следовательно

$$0 \leqslant B_{k+1} - A_{k+1} \leqslant q^k(1-\ell_1)\ldots(1-\ell_k)(B_1 - A_1).$$

Далее, так как $q^k \to 0$ при $k \to \infty$, то $\lim\limits_{k\to\infty}(B_k - A_k) = 0$. Кроме того, пределы последовательностей $\{MA_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{MB_k\}_{k=1}^{\infty}$ существуют в силу леммы 3.1, поэтому

$$\lim_{k\to\infty} MA_k = \lim_{k\to\infty} MB_k. \tag{3.4}$$

Теперь, переходя в (3.1) к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MA_k \leqslant H_*\big(\overline{\ell}, x_0\big) \leqslant M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MB_k, \tag{3.5}$$

откуда, с учетом (3.4), следует существование предела $H\big(\overline{\ell}, x_0\big)$ и равенство (3.3). □

Следствие 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы 3.2, $X(u) > 0$ и $M\ell(u) > 0$. Тогда предел (3.3) положительный.*

Доказательство. Отметим, что последовательность $\{MA_k\}_{k=1}^{\infty}$ неубывающая, $MA_1 = X(u) > 0$, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} MA_k > 0$. Далее, в силу теоремы 3.2 для почти всех $\sigma \in \Sigma$ существует предел $H\big(\bar{\ell}, x_0\big) = M\ell(u) \lim\limits_{k\to\infty} MA_k > 0$. $\square$

Теорема 3.3. *Пусть выполнено условие 1.1. Тогда для любых $m \in \mathbb{N}$, $x_0 \in [x(u), K]$ и для почти всех $\sigma \in \Sigma$ выполнены неравенства*

$$M\ell(u)MA_m \leqslant H_*\big(\bar{\ell}, x_0\big) \leqslant M\ell(u)MB_m. \tag{3.6}$$

Доказательство. В силу леммы 3.1 последовательность $\{MA_k\}_{k=1}^{\infty}$ неубывающая и имеет конечный предел, поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} MA_k \geqslant MA_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Из (3.5) получаем

$$M\ell(u)MA_m \leqslant M\ell(u) \lim_{k\to\infty} MA_k \leqslant H_*\big(\bar{\ell}, x_0\big).$$

Поскольку последовательность $\{MB_k\}_{k=1}^{\infty}$ невозрастающая, то аналогично получаем неравенство в правой части (3.6). $\square$

4. Примеры вычисления и оценок средней временной выгоды

Пример 4.1. Исследуем популяцию, динамика которой задана линейным уравнением

$$\dot{x} = a(K - x), \quad x \geqslant 0. \tag{4.1}$$

Предполагаем, что $a > 0$, $K > 0$, начальный размер популяции $x_0 \geqslant 0$, случайные величины $\omega_1, \omega_2, \ldots$ независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим задачу — найти $u \in [0, 1]$, при котором с вероятностью единица достигается наибольшее значение средней временной выгоды.

По определению случайных величин A_k имеем $A_{k+1} = \varphi\big(d, (1 - \ell_k)A_k\big)$, $k = 1, 2, \ldots,$ следовательно,

$$MA_{k+1} = M\varphi\big(d, (1 - \ell_k)A_k\big), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Решением уравнения (4.1), удовлетворяющим начальному условию $\varphi(t, x) = x$, является функция $\varphi(t, x) = K + (x - K)e^{-at}$, поэтому

$$MA_{k+1} = M\big(K + ((1 - \ell_k)A_k - K)e^{-ad}\big) = K(1 - e^{-ad}) + e^{-ad}M((1 - \ell_k)A_k).$$

Случайные величины ℓ_k и A_k независимы, тогда $M\big((1 - \ell_k)A_k\big) = (1 - M\ell_k)MA_k = (1 - M\ell(u))MA_k$ и следовательно,

$$MA_{k+1} = K(1 - e^{-ad}) + e^{-ad}(1 - M\ell(u))MA_k, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{4.2}$$

В силу леммы 3.1, существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} MA_k$, поэтому можно перейти к пределу в (4.2). Пусть $\lim\limits_{k\to\infty} MA_k = A(u)$, тогда $A(u) = K(1 - e^{-ad}) + e^{-ad}(1 - M\ell(u))A(u)$. Отсюда находим,что

$$A(u) = \frac{K(1 - e^{-ad})}{1 - e^{-ad}(1 - M\ell(u))}.$$

В силу теоремы 3.2, $H\big(\bar{\ell}, x_0\big) = M\ell(u) \lim\limits_{k\to\infty} MA_k = M\ell(u)A(u)$. Рассмотрим функцию

$$H(u) \doteq M\ell(u)A(u) = \frac{K(1-e^{-ad})M\ell(u)}{1-e^{-ad}(1-M\ell(u))}.$$

Несложно показать, что $H(u)$ достигает наибольшего значения, если $M\ell(u)$ максимально.

В [6] показано, что, если функция распределения F абсолютно непрерывна, то математическое ожидание случайной величины $\ell(\omega, u)$ равно

$$M\ell(u) = \int\limits_0^u tf(t)dt + u\big(1-F(u)\big), \tag{4.3}$$

где через f обозначена плотность данного распределения. В этом примере распределение F равномерное на отрезке $[0,1]$, поэтому $f(t) = 1$ при $t \in [0,u]$, $F(u) = u$. Следовательно, из (4.3) получаем, что $M\ell(u) = u - \dfrac{u^2}{2}$. Функция $M\ell(u)$ достигает наибольшего значения при $u = 1$, при этом $H(1) = \dfrac{K(1-e^{-ad})}{2-e^{-ad}}$. Таким образом, можно сделать вывод, что для достижения наибольшей средней временной выгоды для популяции (4.2) долю добываемого ресурса ограничивать не нужно. Отметим, что если популяция задана уравнениями $2-5$, приведенными в замечании 1.1, то этот вывод является неверным, так как все данные уравнения имеют решения $\varphi(t,0) \equiv 0$.

П р и м е р 4.2. Рассмотрим популяцию, заданную логистическим уравнением

$$\dot{x} = (a - bx)x, \tag{4.4}$$

где $a > 0$, $b > 0$; считаем, что начальный размер популяции $x_0 \geqslant 0$. Найдем оценки средней временной выгоды для уравнения (4.4), выполненные с вероятностью единица.

Решением уравнения (4.4), удовлетворяющим начальному условию $\varphi(0,x) = x$, является функция

$$\varphi(t,x) = \frac{axe^{at}}{a + bx(e^{at}-1)}, \tag{4.5}$$

поэтому уравнение (2.1) при любом $u \in [0,1]$ имеет нулевую неподвижную точку. Отметим, что $\varphi(d,0) = 0$ и $\varphi'_x(d,0) = e^{ad}$. В силу утверждения 2.2, при $u \in \big[0, 1-e^{-ad}\big)$ уравнение (2.1) имеет неподвижную точку $X(u)$, такую, что $0 < X(u) \leqslant K = \dfrac{a}{b}$. Непосредственные вычисления показывают, что $X(u) = \dfrac{ae^{ad}(1-u)-a}{b(e^{ad}-1)(1-u)}$. При $u \in \big[1-e^{-ad}, 1\big]$ уравнение (2.1) имеет только нулевую неподвижную точку.

Таким образом, при $u < 1 - e^{-ad}$ неравенства (2.3) имеют вид

$$M\ell(u)\frac{ae^{ad}(1-u)-a}{b(e^{ad}-1)(1-u)} \leqslant H_*\big(\bar{\ell}, x_0\big) \leqslant \frac{a}{b}M\ell(u). \tag{4.6}$$

При $u \in \big[1-e^{-ad}, 1\big]$ в левой части (4.6) стоит ноль. В силу теоремы 2.1, неравенства (4.6) выполнены для любого $x_0 \in \left[\dfrac{ae^{ad}(1-u)-a}{b(e^{ad}-1)}, \dfrac{a}{b}\right]$ и для почти всех $\sigma \in \Sigma$.

Учитывая (4.5), аналогично примеру 4.1 найдем

$$MA_{k+1} = M\Big(\frac{ae^{ad}(1-\ell_k)A_k}{a+b(e^{ad}-1)(1-\ell_k)A_k}\Big), \quad k=1,2,\ldots.$$

Поскольку функция $\varphi(d,x)$ выпукла вниз, то в силу неравенства Иенсена и с учетом независимости случайных величин ℓ_k и A_k имеем

$$MA_{k+1} \leqslant \frac{ae^{ad}(1-M\ell(u))MA_k}{a+b(e^{ad}-1)(1-M\ell(u))MA_k}. \tag{4.7}$$

Переходя к пределу в (4.7) и решая полученное неравенство, получаем

$$A(u) \leqslant \frac{a(1-M\ell(u))e^{ad}-a}{b(e^{ad}-1)(1-M\ell(u))}.$$

Отсюда в силу теоремы 3.2 для средней временной выгоды получаем оценку сверху, выполненную с вероятностью единица,

$$H\big(\overline{\ell},x_0\big) = M\ell(u)A(u) \leqslant M\ell(u)\frac{a(1-M\ell(u))e^{ad}-a}{b(e^{ad}-1)(1-M\ell(u))}.$$

Объединяя последнее неравенство с (4.6), окончательно получаем, что для почти всех $\sigma\in\Sigma$ при $u<1-e^{-ad}$ выполнены неравенства

$$aM\ell(u)\frac{e^{ad}(1-u)-1}{b(e^{ad}-1)(1-u)} \leqslant H\big(\overline{\ell},x_0\big) \leqslant aM\ell(u)\frac{e^{ad}(1-M\ell(u))-1}{b(e^{ad}-1)(1-M\ell(u))}. \tag{4.8}$$

З а м е ч а н и е 4.1. Неравенство (4.8) можно записать в сокращенном виде следующим образом:

$$M\ell(u)X(u) \leqslant H\big(\overline{\ell},x_0\big) \leqslant M\ell(u)X(M\ell(u)), \tag{4.9}$$

где $X(u)$ — неподвижная точка уравнения (2.1). Отметим, что (4.9) верно не только для логистического уравнения (4.4), но и для любого дифференциального уравнения, у которого решение $\varphi(d,x)$ обладает свойством выпуклости вниз.

Автор выражает благодарность научному руководителю профессору кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, д.ф.-м.н. Л. И. Родиной за внимание к работе и руководство ее выполнением.

References

[1] W. J. Reed, “The steady state of a stochastic harvesting model”, *Mathematical Biosciences*, **41**:3–4 (1978), 273–307.

[2] A. Glait, “Optimal harvesting in continuous time with stochastic growth”, *Mathematical Biosciences*, **41**:1–2 (1978), 111–123.

[3] R. Lande, S. Engen, B. E. Saether, *Stochastic Population Dynamics in Ecology and Conservation*, Oxford University Press, 2003.

[4] S. J. Schreiber, M. Benaim, K. A. S. Atchadé, “Persistence in fluctuating environments”, *Journal of Mathematical Biology*, **62**:5 (2011), 655–683.

[5] O. Tahvonen, M.F. Quaas, R. Voss, "Harvesting selectivity and stochastic recruitment in economic models of age-structured fisheries", *Journal of Environmental Economics and Management*, **92** (2018), 659–676.

[6] Л. И. Родина, "Оптимизация средней временной выгоды для вероятностной модели популяции, подверженной промыслу", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28**:1 (2018), 48–58. [L. I. Rodina, "Optimization of average time profit for a probability model of the population subject to a craft", *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:1 (2018), 48–58 (In Russian)].

[7] Л. И. Родина, "Свойства средней временной выгоды в стохастических моделях сбора возобновляемого ресурса", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **28**:2 (2018), 213–221. [L. I. Rodina, "Properties of average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource", *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **28**:2 (2018), 213–221 (In Russian)].

[8] B. Yang, Y. Cai, K. Wang, W. Wang, "Optimal harvesting policy of logistic population model in a randomly fluctuating environment", *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **526** (2019), 120817.

[9] A. Hening, K. Q. Tran, T. T. Phan, G. Yin, "Harvesting of interacting stochastic populations", *Journal of Mathematical Biology*, **79**:2 (2019), 533–570.

[10] Л. И. Родина, "Об одной стохастической модели сбора возобновляемого ресурса", *Вестник российских университетов. Математика*, **23**:124 (2018), 685–695. [L. I. Rodina, "About one stochastic harvesting model of a renewed resourse", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **23**:124 (2018), 685–695 (In Russian)].

[11] Ю. В. Мастерков, Л. И. Родина, "Оценка средней временной выгоды для стохастической структурированной популяции", *Известия Института математики и информатики Удмуртского государственного университета*, **56** (2020), 41–49. [Yu. V. Masterkov, L. I. Rodina, "Estimation of averadge time profit for stochastic structured population", *Izv. IMI UdGU*, **56** (2020), 41–49 (In Russian)].

[12] А. А. Родин, Л. И. Родина, А. В. Черникова, "О способах эксплуатации популяции, заданной разностным уравнением со случайными параметрами", *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **32**:2 (2022), 211–227. [A. A. Rodin, L.I. Rodina, A.V. Chernikova, "On how to exploit a population given by a difference equation with random parameters", *The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science*, **32**:2 (2022), 211–227 (In Russian)].

[13] А. В. Черникова, "О существовании предела средней временной выгоды в вероятностных моделях сбора возобновляемого ресурса", *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:140 (2022), 386–404. [A. V. Chernikova, "About existence of the limit of the average time profit in stochastic models of harvesting a renewable resource", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:140 (2022), 386–404 (In Russian)].

[14] T. Upmann, S. Behringer, "Harvesting a remote renewable resource", *Theoretical Ecology*, **13**:4 (2020), 459–480.

[15] M. Liu, "Optimal Harvesting of Stochastic Population Models with Periodic Coefficients", *Journal of Nonlinear Science*, **32**:2 (2022), 1–14.

[16] Г. Ю. Ризниченко, *Лекции по матеатическим моделям в биологии. Ч. 1*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2002, 232 с. [G. Yu. Riznichenko, *Lectures on Mathematical Models in Biology. Part 1*, Scientific-Publishing Centre "Regular and Chaotic Dynamics", Izhevsk, 2002 (In Russian), 232 pp.]

[17] А. Н. Ширяев, *Вероятность-1*, Наука, М., 1989, 580 с. [A. N. Shiryaev, *Probability-1*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russian), 580 pp.]

[18] О. А. Кузенков, Е. А. Рябова, *Математическое моделирование процессов отбора*, Издательство ННГУ, Н. Новгород, 2007, 324 с. [O. A. Kuzenkov, E. A. Ryabova, *Mathematical Modelling of Selection Processes*, Nizhny Novgorod University Press, Nizhnii Novgorod, 2007 (In Russian), 324 pp.]

Информация об авторе

Волдеаб Мебрахтом Себхату, аспирант, кафедра функционального анализа и его приложений. Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, г. Владимир, Российская Федерация. E-mail: mebseb2018@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1586-4728

Поступила в редакцию 18.01.2023 г.
Поступила после рецензирования 03.03.2023 г.
Принята к публикации 10.03.2023 г.

Information about the author

Mebrahtom S. Woldeab, Post-Graduate Student, Functional Analysis and its Applications Department. Vladimir State University, Vladimir, Russian Federation.
E-mail: mebseb2018@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1586-4728

Received 18.01.2023
Reviewed 03.03.2023
Accepted for press 10.03.2023